CIS 705 — Programming Languages — Spring 2009

Assignment 1

Model Answers

Exercise 1

Suppose $t_2 \in \mathsf{Nats}$. It will suffice to show that, for all $t_1 \in \mathsf{Nats}$, there is a $t_3 \in \mathsf{Nats}$ such that $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$. Let

$$P = \{\, t_1 \in \mathsf{Nats} \mid \text{there is a } t_3 \in \mathsf{Nats} \text{ such that } (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus} \,\}.$$

It will suffice to show that, for all $t_1 \in \mathsf{Nats}$, $P(t_1)$, and we show this by structural induction on Nats.

(Zero) We must show $P(\mathsf{zero})$, i.e., that there is a $t_3 \in \mathsf{Nats}$ such that $(\mathsf{zero}, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$. By (Plus-Zero), we have that $t_2 \in \mathsf{Nats}$ and $(\mathsf{zero}, t_2, t_2) \in \mathsf{Plus}$.

(Succ) Suppose $t_1 \in \mathsf{Nats}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t_1)$, i.e., that there is a $t_3 \in \mathsf{Nats}$ such that $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show $P(\mathsf{succ}\ t_1)$, i.e., that there is a $t_3' \in \mathsf{Nats}$ such that $(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$. Since $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$ and by (Plus-Succ), we have that $\mathsf{succ}\ t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$.

Exercise 2

Let

$$P = \{\, (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \mid \text{for all } t_3' \in \mathsf{Nats}, \text{ if } (t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}, \text{ then } t_3 = t_3' \,\}.$$

It will suffice to show that,

$$\text{for all } t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}, \text{ if } (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}, \text{ then } P(t_1, t_2, t_3).$$

(Given this result, we would proceed as follows. Suppose $t_1, t_2, t_3, t_3' \in \mathsf{Nats}$, $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$. We must show that $t_3 = t_3'$. By the result, we have that $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., for all $t_3' \in \mathsf{Nats}$, if $(t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$, then $t_3 = t_3'$. But $t_3' \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$, so that $t_3 = t_3'$.)

We proceed by induction on Plus.

(Plus-Zero) Suppose $t \in \mathsf{Nats}$. We must show that $P(\mathsf{zero}, t, t)$, i.e., for all $t_3' \in \mathsf{Nats}$, if $(\mathsf{zero}, t, t_3') \in \mathsf{Plus}$, then $t = t_3'$. Suppose $t_3' \in \mathsf{Nats}$ and $(\mathsf{zero}, t, t_3') \in \mathsf{Plus}$. We must show that $t = t_3'$, and this follows by the inversion lemma for Plus.

(Plus-Succ) Suppose $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., for all $t_3' \in \mathsf{Nats}$, if $(t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$, then $t_3 = t_3'$. We must show that $P(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, \mathsf{succ}\ t_3)$, i.e., for all $t_3' \in \mathsf{Nats}$, if $(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$, then $\mathsf{succ}\ t_3 = t_3'$. Suppose $t_3' \in \mathsf{Nats}$ and $(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, t_3') \in \mathsf{Plus}$. We must show that $\mathsf{succ}\ t_3 = t_3'$. By the inversion lemma for Plus, we have that there is a $t_3'' \in \mathsf{Nats}$ such that $t_3' = \mathsf{succ}\ t_3''$ and $(t_1, t_2, t_3'') \in \mathsf{Plus}$. By the inductive hypothesis, we have that $t_3 = t_3''$. Thus $\mathsf{succ}\ t_3 = \mathsf{succ}\ t_3'' = t_3'$.

Exercise 3

Let P be the set of all $(t_1, t_2, s_1) \in \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats}$ such that,

$$\text{for all } t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats},\ \text{if } (s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus} \text{ and } (t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus},\ \text{then } (t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}.$$

It will suffice to show that,

$$\text{for all } t_1, t_2, s_1 \in \mathsf{Nats},\ \text{if } (t_1, t_2, s_1) \in \mathsf{Plus},\ \text{then } P(t_1, t_2, s_1).$$

(Given this result, we would proceed as follows. Suppose $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, $(t_1, t_2, s_1) \in \mathsf{Plus}$, $(s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $(t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. By the result, we have that $P(t_1, t_2, s_1)$, i.e., for all $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, if $(s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, then $(t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. But $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, $(s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, and thus we can conclude that $(t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$.)

We proceed by induction on Plus.

- **(Plus-Zero)** Suppose $t \in \mathsf{Nats}$. We must show that $P(\mathsf{zero}, t, t)$, i.e., for all $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, if $(t, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, then $(\mathsf{zero}, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. Suppose $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, $(t, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $(\mathsf{zero}, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. Since $(t, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, Exercise 2 tells us that $s_2 = s_3$. Thus, by (Plus-Zero), we have that $(\mathsf{zero}, s_3, s_2) = (\mathsf{zero}, s_2, s_2) \in \mathsf{Plus}$.

- **(Plus-Succ)** Suppose $t_1, t_2, s_1 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, s_1) \in \mathsf{Plus}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t_1, t_2, s_1)$, i.e., for all $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, if $(s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, then $(t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $P(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, \mathsf{succ}\ s_1)$, i.e., for all $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, if $(\mathsf{succ}\ \ s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, then $(\mathsf{succ}\ t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. Suppose $t_3, s_2, s_3 \in \mathsf{Nats}$, $(\mathsf{succ}\ \ s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $(\mathsf{succ}\ t_1, s_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$. Because $(\mathsf{succ}\ s_1, t_3, s_2) \in \mathsf{Plus}$, the inversion lemma for Plus tells us that there is an $s_2' \in \mathsf{Nats}$ such that $s_2 = \mathsf{succ}\ s_2'$ and $(s_1, t_3, s_2') \in \mathsf{Plus}$. By the inductive hypothesis, substituting s_2' for s_2, we have that if $(s_1, t_3, s_2') \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, then $(t_1, s_3, s_2') \in \mathsf{Plus}$. But $(s_1, t_3, s_2') \in \mathsf{Plus}$ and $(t_2, t_3, s_3) \in \mathsf{Plus}$, and thus $(t_1, s_3, s_2') \in \mathsf{Plus}$. Hence $(\mathsf{succ}\ t_1, s_3, s_2) = (\mathsf{succ}\ t_1, s_3, \mathsf{succ}\ s_2') \in \mathsf{Plus}$, by (Plus-Succ).

Exercise 4

First, we prove two lemmas.

Lemma 4.1
For all $t \in \mathsf{Nats}$, $(t, \mathsf{zero}, t) \in \mathsf{Plus}$.

Proof. Let

$$P = \{\, t \in \mathsf{Nats} \mid (t, \mathsf{zero}, t) \in \mathsf{Plus} \,\}.$$

It will suffice to show that, for all $t \in \mathsf{Nats}$, $P(t)$, and we show this by structural induction on Nats.

- **(Zero)** We must show $P(\mathsf{zero})$, i.e., that $(\mathsf{zero}, \mathsf{zero}, \mathsf{zero}) \in \mathsf{Plus}$. And this follows by (Plus-Zero).

(Succ) Suppose $t \in \mathsf{Nats}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t)$, i.e., that $(t, \mathsf{zero}, t) \in \mathsf{Plus}$. We must show $P(\mathsf{succ}\ t)$, i.e., $(\mathsf{succ}\ t, \mathsf{zero}, \mathsf{succ}\ t) \in \mathsf{Plus}$, and this follows from the inductive hypothesis by (Plus-Succ).

□

Lemma 4.2
For all $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$, *if* $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$, *then* $(t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$.

Proof. Let

$$P = \{\, (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \mid (t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus} \,\}.$$

It will suffice to show that,

$$\text{for all } t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats},\ \text{if } (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus},\ \text{then } P(t_1, t_2, t_3).$$

(Given this result, we would proceed as follows. Suppose $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $(t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$. By the result, we have that $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., $(t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$.)

We proceed by induction on Plus.

(Plus-Zero) Suppose $t \in \mathsf{Nats}$. We must show that $P(\mathsf{zero}, t, t)$, i.e., $(\mathsf{zero}, \mathsf{succ}\ t, \mathsf{succ}\ t) \in \mathsf{Plus}$, and this follows by (Plus-Zero).

(Plus-Succ) Suppose $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., $(t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $P(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, \mathsf{succ}\ t_3)$, i.e., $(\mathsf{succ}\ t_1, \mathsf{succ}\ t_2, \mathsf{succ}(\mathsf{succ}\ t_3)) \in \mathsf{Plus}$, which follows from the inductive hypothesis by (Plus-Succ).

□

Now, we use our lemmas to prove the main result. Let

$$P = \{\, (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \times \mathsf{Nats} \mid (t_2, t_1, t_3) \in \mathsf{Plus} \,\}.$$

It will suffice to show that,

$$\text{for all } t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats},\ \text{if } (t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus},\ \text{then } P(t_1, t_2, t_3).$$

(Given this result, we would proceed as follows. Suppose $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $(t_2, t_1, t_3) \in \mathsf{Plus}$. By the result, we have that $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., $(t_2, t_1, t_3) \in \mathsf{Plus}$.)

We proceed by induction on Plus.

(Plus-Zero) Suppose $t \in \mathsf{Nats}$. We must show that $P(\mathsf{zero}, t, t)$, i.e., $(t, \mathsf{zero}, t) \in \mathsf{Plus}$, which follows by Lemma 4.1.

(Plus-Succ) Suppose $t_1, t_2, t_3 \in \mathsf{Nats}$ and $(t_1, t_2, t_3) \in \mathsf{Plus}$, and assume the inductive hypothesis: $P(t_1, t_2, t_3)$, i.e., $(t_2, t_1, t_3) \in \mathsf{Plus}$. We must show that $P(\mathsf{succ}\ t_1, t_2, \mathsf{succ}\ t_3)$, i.e., $(t_2, \mathsf{succ}\ t_1, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$. Since $(t_2, t_1, t_3) \in \mathsf{Plus}$, Lemma 4.2 tells us that $(t_2, \mathsf{succ}\ t_1, \mathsf{succ}\ t_3) \in \mathsf{Plus}$.